

On veut

$$A^{10} = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans cette séance on va voir

(i) exemples / exercices

(ii) notions de multiplicité algébrique et géométrique $\leftarrow$ et un lien entre les deux

12.11

Exercice / Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -2 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

On veut calculer
les valeurs et
vecteurs propres

① Pour les valeurs propres = racines de $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_3)$

② Pour chaque valeur propre λ on calcule $E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I_3)$

$$\textcircled{1} \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 4 & 4 \\ -2 & -2-\lambda & -5 \\ 1 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{dev}}{=} (4-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2-\lambda & -5 \end{pmatrix}$$

$$= (4-\lambda) \left((-2-\lambda)(5-\lambda) + 10 \right) + 2 \cdot (4(5-\lambda) - 8) + (-20 + 4(2+\lambda))$$

$$= (4-\lambda) (\lambda^2 - 3\lambda) + 2(-4\lambda + 12) + (4\lambda - 12)$$

$$\textcircled{1} = (4-\lambda) \lambda (\lambda-3) - (4\lambda - 12)$$

$$= (4-\lambda) \cdot \lambda (\lambda-3) - 4(\lambda-3)$$

$$= (\lambda-3) [(4-\lambda)\lambda - 4] = (\lambda-3) (-\lambda^2 + 4\lambda - 4)$$

$$= -(\lambda-3) (\lambda-2)^2$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} = \dots &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 12\lambda - (4\lambda - 12) \\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 \end{aligned}$$

Critère de Gauss Les racines de $\mathbb{Q}$ d'un polynôme $(\pm 1)\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ (et $a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{Z}$), s'il y en a, sont entiers et diviseurs de a_0 .

↳ Dans ce cas: il faut essayer avec $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

Imaginons que l'on essaie ici avec $\lambda = 2$ et c'est une racine

$$\Rightarrow \text{On divise } P_A(\lambda) \text{ par } \lambda - 2: \quad P_A(\lambda) = (\lambda - 2) \cdot (-\lambda^2 + 5\lambda - 6)$$

$$P_A(\lambda) = -(\lambda - 3) \cdot (\lambda - 2)^2$$

$\Leftarrow$

il faut les racines de ce polynôme

Déf. 10.24 Si λ_0 est une valeur propre de A , la multiplicité algébrique de λ_0 est le plus grand entier positif m tel que $(\lambda - \lambda_0)^m$ divise $P_A(\lambda)$. $\rightarrow$ Notation: $\text{mult}_A(\lambda_0)$

Alors $\boxed{\text{mult}_2(2) = 2 \text{ et } \text{mult}_2(3) = 1}$ dans cet exemple.

② Calcul des espaces propres $\underline{F}_2 := \text{Ker}(A - 2I_3)$ $\leftarrow$

$\boxed{\lambda = 2} \rightarrow F_2 = \text{Ker}(A - 2I_3)$ $\leftarrow$ Calculer une

Dans ce cas

$$F_2 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

base

$$x_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow$$

FER
variable

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Ker}(A - 2I_3) = \text{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{matrix} x_1 = -2x_2 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} : x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\lambda = 3$$

$$\mathbb{F}_3 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(même type de calcul)

Def. 10.28 Pour λ valeur propre, $\dim(\mathbb{F}_\lambda) =: \text{mult}_g(\lambda)$
est la multiplicité géométrique de λ .

THM 10.30 $\text{mult}_g(\lambda) \leq \text{mult}_a(\lambda)$ pour toute valeur propre
 λ d'une matrice carrée A .

Dans notre exemple
 $P_A(\lambda) = -(\lambda - 2)^2 (\lambda - 3)$
 $\text{mult}_a(2) = 2 \geq \text{mult}_g(2) = 1$
 $\text{mult}_a(3) = 1 \geq \text{mult}_g(3) = 1$
 On veut des cas où $\text{mult}_g(\lambda) = \text{mult}_a(\lambda)$

Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$:
 Dans ce cas on peut faire la réunion des bases de chaque
 E_λ , $\forall \lambda$ valeur propre $\Rightarrow$ base de $\mathbb{R}^n$ (formée de vecteurs
 propres de A)

Exercice/Exemple

(exemple 10.20)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

← calculer
 valeurs et vecteurs
 propres

① $P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-2)$

② $E_{-1} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $E_2 = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$